Global Positioning System (GPS)

Simon Schelkshorn

Version 1.02 vom 29. August 2007

Das Global Positioning System kurz GPS ist ein satellitengestütztes System zu Positionsbestimmung. Es nutzt 24 Satelliten auf 6 Orbits. Die nachfolgenden Kapitel sollen einen Einblick in das Prinzip der Positionsbestimmung und die zugrundeliegenden mathematischen Zusammenhänge geben. Detailierte Angaben zur konkreten Implementierung werden bewusst nicht gemacht.

1 Positionsbestimmung

1.1 Das Grundprinzip

Aufgabe eines GPS-Empfängers ist es, seine unbekannte Position im dreidimensionalen Raum zu bestimmen. Die Positionsbestimmung basiert dabei auf der Multilateration, also der Abstandsmessung zu bekannten Referenzstationen, die in Form von Satelliten gegeben sind (vgl. Abbildung 1). Die Position der GPS-Satelliten sei zu jedem Zeitpunkt bekannt. Der GPS-Empfänger bestimmt den Abstand zu den von ihm aus sichtbaren Satelliten durch eine Zeitmessung. Er vergleicht dazu den in den Satellitensignalen enthaltenen Zeitstempel mit seiner Uhr und bestimmt daraus die Einwegelaufzeit des Signals vom Satelliten zum ihm. Aus der gemessenen Laufzeit kann der Abstand direkt über die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Signals bestimmt werden. Für diese Laufzeitmessung ist es erforderlich, dass alle beteiligten Satelliten und auch der Empfänger über eine genaue und identische Uhrzeit verfügen.

In der Praxis ist es nicht möglich den Empfänger mit einer entsprechend genauen Uhr auszustatten. Die Uhr im Empfänger weicht also von den Uhren der Satelliten ab. Aus diesem Grund ist neben dem Ort des Empfängers auch die exakte Uhrzeit am Empfänger unbekannt. Es existieren also insgesamt vier Unbekannte, die drei Ortskoordinaten x_0, y_0, z_0 sowie die Abweichung der Empfängeruhr von den Uhren in den Satelliten. Die Abweichung der Empfängeruhr wird in Form eines Fehlers in der Abstandsmessung b_u berücksichtigt.

Diese vier Unbekannten sollen mithilfe eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden.

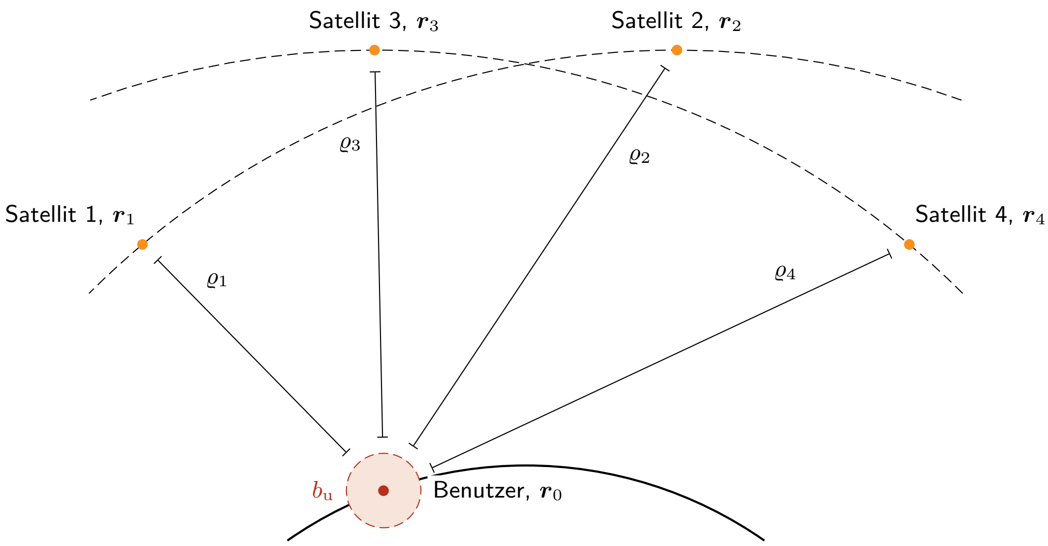

Abb. 1: Entfernungsmessung beim GPS-System, Schematische Darstellung

1.2 Lineares Gleichungssystem zur Positionsbestimmung

Um ein Gleichungssystem für die vier Unbekannten aufzustellen nutzt der GPS-Empfänger den Abstand zu vier unterschiedlichen Satelliten. Der vom Empfänger gemessene Abstand ϱ_i zwischen ihm und dem Satelliten i beträgt

$$\varrho_i = d_i + b_\mathrm{u} = |\boldsymbol{d}_i| + b_\mathrm{u} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{d}_i + b_\mathrm{u} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0) + b_\mathrm{u} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{r}_0 + b_\mathrm{u} \qquad (1)$$

wobei $\boldsymbol{r}_i$ die bekannte Position des i-ten Satelliten und $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}^\mathrm{T}$ die unbekannte Position des Empfängers bezeichnet. Der Vektor $\boldsymbol{e}_i$ ist der Richtungsvektor vom Empfänger zum i-ten Satelliten. Diese gemessene Entfernung stimmt aufgrund der unbekannten Abweichung der Empfängeruhr von den Uhren in den Satelliten nicht mit der echten Entfernung überein. Man bezeichnet sie daher auch als *Pseudoentfernung*.

Obiger Ausdruck (1) für den Zusammenhang zwischen dem Abstand ϱ_i und dem unbekannten Ort $\boldsymbol{r}_0$ des Empfängers ist nichtlinear. Um ein lineares Gleichungssystem zu erhalten muss er in einem ersten Schritt um einen Arbeitspunkt linearisiert werden. Als Arbeitspunkt wählt man eine Annahme über die aktuelle Position des Empfängers sowie eine Abweichung der Empfängeruhr (in der Praxis wählt man häufig die initiale Abweichung zu Null). Den linearisierten Abstand kann man wie folgt angegeben.

$$\varrho_i(\Delta) = \varrho_i - e_{x,i} \cdot \delta x - e_{y,i} \cdot \delta y - e_{z,i} \cdot \delta z + \delta b_\mathrm{u} \qquad (2)$$

Setzt man Gleichung (1) in Gleichung (2) ein und trennt die Variablen nach Zustands- und Beobachtungsgrößen so erhält man

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{r}_0 - b_\mathrm{u} - \delta b_\mathrm{u} + \boldsymbol{e}_i \cdot \begin{bmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \end{bmatrix}^\mathrm{T} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{r}_i - \varrho_i(\Delta) \quad . \qquad (3)$$

Nutzt man nun die gemessenen Entfernung zu den bereits erwähnten vier Satelliten, so kann man das lineare Gleichungssystem zur Positionsbestimmung aufstellen.

$$
\begin{bmatrix} e_{x,1} & e_{y,1} & e_{z,1} & -1 \\ e_{x,2} & e_{y,2} & e_{z,2} & -1 \\ e_{x,3} & e_{y,3} & e_{z,3} & -1 \\ e_{x,4} & e_{y,4} & e_{z,4} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 + \delta x \\ y_0 + \delta y \\ z_0 + \delta z \\ b_{\mathrm{u}} + \delta b_{\mathrm{u}} \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix} e_{x,1} & e_{y,1} & e_{z,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{x,2} & e_{y,2} & e_{z,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{x,3} & e_{y,3} & e_{z,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{x,4} & e_{y,4} & e_{z,4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varrho_1(\Delta) \\ \varrho_2(\Delta) \\ \varrho_3(\Delta) \\ \varrho_4(\Delta) \end{bmatrix} \tag{4}
$$

Obiges Gleichungssystem (4) lässt sich auch in Kurzform angeben

$$
\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \tag{4'}
$$

wobei $\boldsymbol{G}$ die geometrische Anordnung des Systems aus Empfänger und Satelliten, $\boldsymbol{x}$ den unbekannten Zustandsvektor und $\boldsymbol{y}$ den Beobachtungsvektor beschreibt. Unter der Voraussetzung eines idealen Systems könnte der unbekannte Zustandsvektor $\boldsymbol{x}$ und somit die unbekannte Position des Empfängers durch einfache Matrixinversion bestimmt werden.

$$
\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{G})^{-1} \cdot \boldsymbol{y} \tag{5}
$$

Es ist zu beachten, dass es sich hier um die Lösung des linearen Gleichungssystems handelt, welches durch Linearisierung des usprünglichen, nichtlinearen Problems um einen angenommenen Arbeitspunkt entstanden ist. Die Lösung aus Gleichung (5) hängt von der Wahl des Arbeitspunktes ab, und muss nicht genau mit der Lösung des nichtlinearen Problems übereinstimmen.

Aus diesem Grund erweitert man den bisherigen Ansatz um eine Iterationsvorschrift derart, dass die erhaltene Lösung aus Gleichung (5) als neuer Arbeitspunkt für die Linearisierung des ursprünglichen, nichtlinearen Gleichungssystems gewählt wird. Das um den neuen Arbeitspunkt linearisierte Gleichungssystem löst man nun erneut entsprechend der Gleichungen (4) und (5) um wiederum einen verbesserten Arbeitspunkt zu erhalten. Dieses iterative Vorgehen wiederholt man solange, bis eine bestimmte Abbruchbedingung erfüllt ist. Als Abbruchbedingung wählt man in der Regel den Unterschied zweier aufeinanderfolgender Lösungen. Unterscheiden sich zwei aufeinanderfolgende Lösungen nicht mehr als ein vorgegebenes Maß, so betrachtet man das letzte Ergebnis als die wahre Lösung des nichtlinearen Problems.

2 Fehlerbetrachtung

2.1 Berücksichtigung nichtsystematischer Fehler

Ein reales System enthält aber auch nichtsystematische Fehler die eine direkte Lösung mittels Matrixinversion verhindern. Zur Beschreibung des realen Systems erweitert man das Gleichungssystem (4′) um einen additiven Fehlerterm $\boldsymbol{v}$. Da die nichtsystematischen Fehler untrennbar in den gemessenen Pseudoentfernungen enthalten sind, kann nur ein möglichst guter Schätzwert $\hat{\boldsymbol{x}}$ für den wahren Wert des Zustandsvektors $\boldsymbol{x}$ gefunden werden.

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{G} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y} \tag{6}$$

Den besten Schätzwert erhält man indem dieses neue Gleichungssystem (6) mithilfe der Pseudoinversen im Sinne kleinster Fehlerquadrate gelöst wird.

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{opt}} = \left[\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\right]^{-1} \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{y} \tag{7}$$

Die in obiger Gleichung (7) genutzte Pseudoinverse kann auch für nichtquadratische Matrizen $\boldsymbol{G}$ bestimmt werden. Somit können zur Positionsbestimmung auch mehr als die mindestens erforderlichen vier Satelliten benutzt werden, was ein besseres Schätzergebnis zur Folge hat.

2.2 Positionsfehler

Die in den vorangegangenen Kapiteln 1.2 und 2.1 beschriebene Positionsbestimmung basiert auf der Schätzung des Zustandsvektors $\hat{\boldsymbol{x}}$. Die bestmögliche Schätzung $\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{opt}}$ weicht aber aufgrund der nichtsystematischen Fehler vom wahren Wert des Zustandsvektors $\boldsymbol{x}$ ab. Eine Beurteilung der Qualität der gefundenen Schätzung des Zustandsvektors kann durch eine statistische Betrachtung des Schätzvorgangs erfolgen.

Der Zusammenhang des optimalen Schätzwertes mit dem wahren Wert lässt sich unter Verwendung der Gleichungen (6) und (7) wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{opt}} &= \left[\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\right]^{-1} \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{y} \\ &= \boldsymbol{W}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{W}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} \quad . \end{aligned} \tag{8}$$

Der Schätzfehler kann nun ganz einfach als Differenz aus dem wahren Wert und dem optimalen Schätzwert bestimmt werden.

$$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{opt}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{W}\boldsymbol{v} \tag{9}$$

Wie bereits erwähnt erfolgt die Beurteilung der Qualität mithilfe statistischer Methoden. Hierfür bestimmt man ausgehend vom Schätzfehler aus obiger Gleichung (9) die sog. Kovarianzmatrix des Schätzfehlers.

$$\mathrm{Cov}(\Delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{W} \cdot \mathcal{E}\left\{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right\} \cdot \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} \quad . \tag{10}$$

Da die statistischen Eigenschaften des Fehlerprozesses nicht bekannt sind, müssen zur Berechnung der Kovarianzmatrix zusätzlich noch Annahmen über die Beschaffenheit des Fehlerprozesses gemacht werden. Für die weiteren Schritte gelte, dass die Fehlerprozesse für alle Entfernungsmessungen mittelwertfrei und untereinander unkorreliert sind. Darüberhinaus sollen alle Fehlerprozesse die gleiche Varianz σ^2 besitzen.[1] Der Erwartungswert in obiger Gleichung (10) vereinfacht sich somit zu

$$\mathcal{E}\left\{\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right\} = \sigma^2 \cdot \boldsymbol{E} \tag{11}$$

und man erhält für die Kovarianzmatrix:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(\Delta\boldsymbol{x}) &= \sigma^2 \cdot \boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} = \sigma^2 \cdot \left[\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\right]^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\left[\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\right]^{-1} = \sigma^2 \cdot \left[\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\right]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} {\sigma_{xx}}^2 & {\sigma_{xy}}^2 & {\sigma_{xz}}^2 & {\sigma_{xt}}^2 \\ {\sigma_{yx}}^2 & {\sigma_{yy}}^2 & {\sigma_{yz}}^2 & {\sigma_{yt}}^2 \\ {\sigma_{zx}}^2 & {\sigma_{zy}}^2 & {\sigma_{zz}}^2 & {\sigma_{zt}}^2 \\ {\sigma_{tx}}^2 & {\sigma_{ty}}^2 & {\sigma_{tz}}^2 & {\sigma_{tt}}^2 \end{bmatrix} \quad .\end{aligned} \tag{12}$$

Basierend auf der Kovarianzmatrix wird die Schätzgenauigkeit häufig mit der sog. dilution of precision (DOP) beurteilt. Dafür haben sich die nachfolgenden DOP-Werte eingebürgert die keine Kenntnis über die Varianz σ^2 erfordern.

$$\mathrm{GDOP} \equiv \frac{1}{\sigma} \cdot \sqrt{{\sigma_{xx}}^2 + {\sigma_{yy}}^2 + {\sigma_{zz}}^2 + {\sigma_{tt}}^2} \quad \text{geometric dilution of precision} \tag{13a}$$

$$\mathrm{PDOP} \equiv \frac{1}{\sigma} \cdot \sqrt{{\sigma_{xx}}^2 + {\sigma_{yy}}^2 + {\sigma_{zz}}^2} \quad \text{position dilution of precision} \tag{13b}$$

$$\mathrm{HDOP} \equiv \frac{1}{\sigma} \cdot \sqrt{{\sigma_{xx}}^2 + {\sigma_{yy}}^2} \quad \text{horizontal dilution of precision} \tag{13c}$$

$$\mathrm{VDOP} \equiv \frac{1}{\sigma} \cdot \sqrt{{\sigma_{zz}}^2} \quad \text{vertical dilution of precision} \tag{13d}$$

$$\mathrm{TDOP} \equiv \frac{1}{\sigma} \cdot \sqrt{{\sigma_{tt}}^2} \quad \text{time dilution of precision.} \tag{13e}$$

Ist die Schätzvarianz σ^2 jedoch bekannt, kann auch der jeweilige Positionsfehler absolut in Metern angeben. Er berechnet sich aus der Multiplikation des jeweiligen DOP-Wertes mit der Standardabweichung σ.

Man kann erkennen, dass die Kovarianzmatrix aus Gleichung (12) nur von der Matrix $\boldsymbol{G}$ abhängt. Da die Matrix $\boldsymbol{G}$ lediglich durch die Anordnung der sichtbaren Satelliten beeinflusst wird kann es vorkommen dass ein und die selbe Position zu unterschiedlichen Zeiten unterschiedlich genau bestimmt werden kann. Sind zu einem Zeitpunkt von der zu bestimmenden Position mehr als nur die vier mindestens erforderlichen Satelliten sichtbar, kann die Genauigkeit der Schätzung durch die Wahl der vier am besten Positionierten Satelliten verbessert werden.

[1] Diese Annahmen waren zumindest in Zeiten zutreffend, in denen die Satellitendaten künstlich durch die sog. *Selective Availability* verschlechtert wurden. [1]

Literatur

[1] Misra, Pratap ; Enge, Per: *Global Positioning System – Signals, Measurements, and Performance.* Lincoln : Ganga-Jamuna Press, 2004

[2] Parkinson, Bradford W. (Hrsg.) ; Spilker Jr., James J. (Hrsg.): *Global Positioning System: Theory and Applications.* 1st. Cambridge : American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1996

[3] Tsui, James Bao-Yen: *Fundamentals of Global Positioning System Receivers.* New York : John Wiley & Sons, Inc., 2000

[4] Xu, Guochang: *GPS – Theory, Algorithms and Applications.* Berlin : Springer-Verlag, 2003